202. T(1) = 1 n=1

T(n) = 3T(n-1) + 2 n>1

Ta có:

T(n) = 3T(n-1) + 2

= 3[3T(n-2) + 2] + 2

= 32T(n-2) + 3.2 + 2

= 3kT(n-k) + 3k-1.2 + 3k-2.2 + … + 2

= 3n-1T(1) + 3n-2.2 + 3n-3.2 + … + 2

= 3n-1 + 2.(3n-2 + … + 30)

= 3n-1 + 2.

= 3n-1 + 3n-1 - 1

= 2. 3n-1 -1

Vậy T(n) = 0(3n)

203. T(1) = 8 n=1

T(n) = 3T(n-1) - 15 n>1

Ta có:

T(n) = 3T(n-1) - 15

= 3[3T(n-2) - 15] - 15

= 32T(n-2) -3. 15- 15

= 3kT(n-k) - 3k-1.15 - 3k-2.15 - … - 15

= 3n-1T(1) - 3n-2.15 - 3n-3.15 - … - 15

= 8.3n-1 - 15.(3n-2 + … + 30)

= 8.3n-1 - 15.

= 8.3n-1 + 3n-1 - 1

= 3n-1 -

Vậy T(n) = 0(3n)

204. T(1) = 2 n=1

T(n) = T(n-1) + n - 1 n>1

Ta có:

T(n) = T(n-1) + n – 1

= [T(n-2) + (n-1) -1] +n – 1

= T(n-2) + (n-2) + (n-1)

= T(n-k) + (n-k)+ … +(n-2) + (n-1)

= T(1) + 1 + 2 + … + (n-1)

= 2 + (1 + … + n) - n

= 2 +

= - + 2

Vậy T(n) = 0(n2)

205. T(1) = 3 n=1

T(n) = T(n-1) +2 n - 3 n>1

Ta có:

T(n) = T(n-1) + 2n –3

= [T(n-2) +2 (n-1) -3] +2n – 3

= T(n-2) +2 (n-1) + 2n – 2.3

= [T(n-3) + 2(n-2) -3] + 2(n-1) + 2n – 2.3

= T(n-3) + 2(n-2) + 2(n-1) + 2n - 3.3

= T(n-k) + 2(n-k+1)+ … +2(n-2) +2 (n-1) +2n – k.3

= T(1) +2[2 + 2 + … + n] – (n-1).3

= 3 + 2

= n2 – 2n + 4

Vậy T(n) = 0(n2)

206. T(1) = 1 n=1

T(n) = 2T(n-1) + n - 1 n>1

Ta có:

T(n) = 2T(n-1) + n – 1

= 2[2T(n-2) + (n – 1) – 1)] +n -1

= 22.T(n-2) +2 (n-1) + n -2 -1

= 22.[2T(n-3) +(n-2) -1] +2 (n-1) + (n-1) -2 -1

= 23T(n-3) + 22(n-2) +2(n-1) +n - 22 – 2 – 1

=2kT(n-k) + 2k-1(n-k+1) + … + 2(n-1) +n - 2k-1 – 2 -1

= 2n-1.T(1) + [2n-2.2 + … + 22(n-2) + 2(n-1) +n ]– (2n-2 + … + 2 + 1)

Vậy T(n) = 0(2n)

207. T(1) = 5 n=1

T(n) = 2T(n-1) + 3n + 1 n>1

Ta có:

T(n) = 2T(n-1) + 3n + 1

= 2[2T(n-2) +3(n-1) +1] + 3n + 1

= 22T(n-2) + 2.3n + 3n -2.3 +2 +1

=22[2T(n-3) + 3(n-2) +1] + 2.3n +3n -2.3+2+1

= 23T(n-3) + 22.3n +2.3n + 3n +22.3n +2.3n – 22.3 – 2.3 + 22 + 2 +1

= 2kT(n-k) + 3n(2k-1+ … + 2 + 1) – 3(2k-1+ … + 2 )+(2k-1+ … + 2 + 1)

=5.2n-1 + (3n -3 +1)( (2n-2+ … + 2 + 1) +3

Vậy T(n) = 0(2n)

208. T(1) = 1 n=1

T(n) = 2T(n\2) + 6n - 1 n>1, n = 2k

Ta có:

T(n) = 2T(n\2) + 6n – 1

= 2[2T(n\4) +6.n\2 -1] +6n -1

= 22T(n\4) +6n -2 + 6n -1

=22[2T(n\8) + 6.n\4 -1] + 6n + 6n -2 -1

= 23T(n\8) + 3.6n – 22 -2 -1

=2kT(n\2k) + k.6n – 2k-1 - … - 2 – 1

=n.T(1) + 6n.logn – 2k-1

= 6n.logn -1

Vậy T(n) = 0(nlogn)

209. T(1) = 4 n=1

T(n) = 2T(n\2) + 3n +2 n>1, n = 2k

Ta có:

T(n) = 2T(n\2) + 3n +2

= 2[2T(n\4) +3.n\2 +2] +3n +2

= 22T(n\4) +3n +22+ 3n +2

=22[2T(n\8) + 3.n\4 +2] + 3n + 3n +22 + 2

= 23T(n\8) + 3.3n+ 23 +22 + 2

=2kT(n\2k) + k.3n + 2k + … +22 + 2

=n.T(1) + 3n.logn + n + n

= 3n.logn + 6n

Vậy T(n) = 0(nlogn) .

210. T(1) = 1, với n = 1.

T(n) = 6T(n/6) + 2n + 3, với n>1.

Đặt n = 6m, ta có:

T(6m) = 6T(6m-1) + 2.6m +3

= 6[6T(6m-2) + 2.6m-1 + 3] + 2.6m + 3

=…= 6mT(1) + 2m.6m + 3(6m-1 + 6m-1 + …+ 1)

= 6m + 2m.6m + 3(1 – 6m)/(1-6)

= 6m + 2m.6m + 3.6m/5 – 3/5 = 8.6m/5 + 2m.6m – 3/5

Thay m = log6n , ta được:

T(n) = 8n/5 + 2nlog6n – 3/5

= 8n/5 + 2nlogn/log6 – 3/5

= O(nlogn).

211. T(1) = 3, với n = 1.

T(n) = 6T(n/6) + 3n – 1, với n>1.

Đặt n = 6m, ta có :

T(6m) = 6T(6m-1) + 3.6m – 1

= 6[6T(6m-2) + 3.6m-1 – 1] + 3.6m – 1

=…= 6mT(1) + 3m.6m – ( 6m-1 + …+ 1)

= 6m + 3m.6m – (1 – 6m)/(1 – 6)

= 6m  + 3m.6m + 6m/5 – 1/5

= 6.6m/5 + 3m.6m – 1/5

Thay m = log6n, ta được :

T(n) = 6m/5 + 3nlog6n – 1/5

= 6m/5 + 3nlogn/log6 – 1/5

= O(nlogn).

212. T(1) = 3, với n = 1.

T(n) = 4T(n/3) + 2n – 1, với n>1.

Đặt n = 3m, ta có:

T(3m) = 4T(3m-1) + 2.3m – 1

= 4[4T(3m-2) + 2.3m-1 – 1] + 2.3m – 1

=…= 4mT(1) + 2.4m-1.3 + …+ 2.40.3m – ( 4m-1 + …+ 1)

= 3.4m + 2.4m(3/4 + (3/4)2 +…+ (3/4)m) – (1 – 4m)/(1 – 4)

= 3.4m + 2.4m(1/(1 – 3/4) – 1) – 4m/3 + 1/3

= 3.4m  - 4m/3 + 6.4m + 1/3

= 3.4m – 4m/3 + 6.4m + 1/3

= 26.4m/3 + 1/3

Thay m = log3n, ta được:

T(n) = 26.4log3n/3 + 1/3 = O(4log3n).

213. T(1) = 2, với n = 1.

T(n) = 4T(n/3) + 3n – 5, với n>1.

Đặt n = 3m, ta có:

T(3m) = 4T(3m-1) + 3.3m – 5

= 4[4T(3m-2) + 3.3m-1 – 5] + 3.3m – 5

=…= 4mT(1) + 3.4m-1.3 + 3.4m-2.32 + …+ 3.3m – 5.( 4m-1 +…+1 )

= 2.4m + 3.4m( 3/4 + (3/4)2 + …+ (3/4)m) – 5.(1- 4m)/(1- 4)

= 2.4m + 3.4m( 1/( 1- 3/4) – 1 ) – 5.4m/3 + 5/3

= 2.4m + 9.4m – 5.4m/3 + 5/3

= 28.4m/3 + 5/3

Thay m = log3n , ta được:

T(n) = 28.4log3n/3 + 5/3= O(4log3n).

214. T(1) = 1, với n = 1.

T(n) = 3T(n/2) + n2 – n, với n>1.

Đặt n = 2m, ta có :

T(2m) = 3T(2m-1) + 22m – 2m

= 3[3T(2m-2) + 22(m-1) – 2m-1] + 22m – 2m

=…= 3mT(1) + 3m-1.22 + 3m-2.22.2 +…+ 22m – ( 3m-1.2 + … + 2m)

= 3m + 3m( 22/3 + (22/3)2 + …+ (22/3)m) – 3m( 2/3 +…+ (2/3)m)

= 3m + 3m( 4/3 + (4/3)2 +...+(4/3)m ) – 3m(1/(1 – 2/3) – 1)

= 3m + 3m.4.( 1- (4/3)m)/3.(1- 4/3) – 2.3m

= 3m + 4.3m.( 4m/3m – 1 ) – 2.3m

= 3m + 4.4m – 4.3m – 2.3m

= 4.4m – 5.3m

Thay m = logn, ta được:

T(n) = 4.4logn – 5.3logn= 4.n2 – 5.3logn= O(n2).

215. T(1) = 4, với n = 1.

T(n) = 3T(n/2) + n2 – 2n + 1, với n>1.

**Cách 1:** Đặt n = 2m, ta có:

T(2m) = 3T(2m-1) + 22m – 2.2m + 1

= 3[3T(2m-2) + 22(m-1) – 2.2m-1 + 1] + 22m – 2.2m + 1

=…

= 3mT(1) + 3m-1.22 + 3m-2.22.2 +…+22m – ( 3m-1.2.2 + …+2.2m) + 3m-1 +… +1

= 4.3m + 3m(4/3 + (4/3)2 +…+(4/3)m) – 2.3m(2/3 + …+ (2/3)m) + 3m-1 +…+ 1

= 4.3m + 3m.4( 1 – (4/3)m)/3.(1- 4/3) – 2.3m(1/(1 – 2/3) – 1) + (1 – 3m)/(1 – 3)

= 4.3m + 4.3m ( 4m/3m – 1 ) – 2.2.3m + 3m/2 – 1/2

= 4.3m + 4.4m – 4.3m – 4.3m + 3m/2 – 1/2

= 4.4m – 7.3m/2 – 1/2

Thay m = logn, ta được:

T(n) = 4.n2 – 7.3logn/2 – 1/2= O(n2).

**Cách 2:** Sử dụng Định lý chính, ta có: a = 3, b = 2, d = 2 ( vì n2 – 2n + 1 = (n-1)2)

Và 3 = a < bd = 4 nên : T(n) = O( (n-1)d) = O((n-1)2) = O(n2).

216. T(1) = 1, với n = 1.

T(n) = 3T(n/2) + n – 2, với n>1.

Đặt n = 2m, ta có:

T(2m) = 3T(2m-1) + 2m – 2

= 3[3T(2m-2) + 2m-1 – 2] + 2m – 2

=…

= 3mT(1) + 3m-1.2 + 3m-2.22 + …+ 2m – 2(3m-1 +...+1)

= 3m + 3m( 2/3 + (2/3)2 + …+ (2/3)m) – 2.(1 - 3m)/(1 - 3)

= 3m + 3m( 1/( 1- 2/3) – 1) – 3m  + 1

= 3m + 2.3m – 3m + 1

= 2.3m + 1

Thay m = logn , ta được:

T(n) = 2.3logn + 1 = O(3logn).

217. T(1) = 1, với n = 1.

T(n) = 3T(n/2) + 5n – 7, với n>1.

Đặt n = 2m, ta có:

T(2m) = 3T(2m-1) + 5.2m – 7

= 3[3T(2m-2) + 5.2m-1 – 7] + 5.2m – 7

=…

= 3mT(1) + 5.3m-1.2 + 5.3m-2.22 +…+ 5.2m – 7( 3m-1 +…+ 1)

= 3m + 5.3m( 2/3 + (2/3)2 +…+(2/3)m) – 7 ( 3m-1 +…+1)

= 3m + 5.3m( 1/(1 – 2/3) – 1) – 7(1 – 3m)/(1 – 3)

= 3m + 10.3m – 7.3m/2 + 7/2

= 15.3m/2 + 7/2

Thay m = logn, ta được:

T(n) = 15.3logn/2 + 7/2= O(3logn).

218. T(1)=1; n≥2; n là lũy thừa của 3. T(n)= 4T(n/3)+.

Ta có: T(n)= 4T()+.

=4[4T) +] + =T() +()

=T() +( + )

=T() +( + + )

=…

=T() +( + + +…+ )

Áp dụng công thức k = lần, ta thu được:

T(n)= + = + – = O().

219. T(1)=1; n ≥2; n là lũy thừa của 3;T(n)=4T(n/3) + -7n + 5

Ta có: T(n) =4T(n/3) + -7n + 5

=4[4T) +-7()+5] +-7n+5

=T()() – 7n(1+ ) + 5.2

=T()( + ) – 7n(1+ + ) + 5.3

=…

=T()( + +…+) – 7n(1+ + +…+) + 5k.

Áp dụng công thức k = lần, ta thu được:

T(n)=+ – ()+5= O().

220. T(1)= 1; n≥2; n là lũy thừa của 4; T(n)= T(n/4)++1.

Ta có: T(n)= T(n/4)++1

=(T()++1)++1= T()+ (1+) +2

=T()+ (1++)+3

=…

= T()+ (1+++…+)+k

= T()+(1+ + +…+ )+k

Áp dụng công thức k = lần, ta thu được:

T(n)=1++ =O().

221. Cho 0≤α, β≤1,α+β=1. T(1)=1;T(n)=T(αn)+T(βn)+cn; n≥1

Chứng minh rằng T(n)=O(n).

222. F0=0; F1=1; Fn=Fn-1+Fn-2.

Chứng minh: Fn = , trong đó a= , b=, n≥2 (1).

Ta chứng minh bằng phương pháp qui nạp.

* n=2: F2==1. Vậy (1) đúng.
* Giả sử (1) đúng với n. Ta cần chứng minh (1) đúng với n+1.

Thật vậy, ta thấy a và b đều là nghiệm của phương trinh bậc hai : x2 -x -1=0

Do đó: a2= a+1; b2= b+1. Bây giờ ta xét:

an+1= a2.an-1=(a+1) an-1=an+an-1

bn+1=b2.bn-1=(b+1) bn-1=bn+bn-1

Suy ra: Fn+1= = ==Fn+Fn-1.

Vậy (1)đúng.

Tóm lại Fn = , trong đó a= , b=, n≥2.

231. T(n)=d, n≤1;

T(n)=aT(n/c)+b, n≥2;

Ta có:T(n)= aT(n/c)+b

=a. [aT()+b]+b= .T() + (1+)b

= T() + (1++)b

=…

= T() + (1+++…+)b

Áp dụng công thức k> thì ta có:

T(n)=d+ b= O().

232. T(n)=d, n≤1;

T(n)=aT(n/c)+b, n≥2;

Ta có:T(n)= aT(n/c)+b

=a. [aT()+b]+b= .T() + b(1+)

= T() + b(1++)

=…

= T() + b(1+++)

Áp dụng công thức k> thì ta có:

T(n)=d+b=O().